

TD 11-12 : Nombres réels, suites réelles

Bornes supérieures et inférieures

Exercice 1 (*Bornes sup et inf, pratique*). Lorsqu'elles existent, déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

$$A = [1, 15[$$

$$B = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$C = \{ \cos t \mid t \in [0, \pi] \}$$

$$D = \{ x(1+x) - \ln(1+x) \mid x \in [0, 1] \}$$

$$E = \left\{ \cos \left(\frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$F = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2 \}$$

Exercice 2 (*Bornes sup et inf, théorique*). Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ deux parties non vides bornées.

1) On définit l'ensemble

$$A + B := \{ a + b \mid a \in A, b \in B \}$$

Montrer que $A + B$ est majoré et que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

2) On définit l'ensemble

$$|A| := \{ |a| \mid a \in A \}$$

Montrer que $|A|$ est majoré et déterminer $\sup |A|$.

Exercice 3. Soit A une partie de \mathbb{R} majorée. On note $M = \sup A$. On suppose que $M \notin A$.

1) Justifier que A n'admet pas de maximum.

2) Montrer que pour tout $\delta > 0$, l'intervalle $[M - \delta, M]$ contient une infinité d'éléments de A .

Nombres rationnels, densité

Exercice 4 (*Nombres rationnels*). Rappel : si $x, y \in \mathbb{Q}$, alors $x + y, x - y, xy$ et $\frac{x}{y}$ (si y est non nul) sont tous rationnels.

1) Soit $x, y \in \mathbb{Q}$ positifs tels que \sqrt{x} et \sqrt{y} sont irrationnels. Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.

2) Montrer que les nombres $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ ainsi que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sont irrationnels.

On peut utiliser le résultat suivant : si n ne s'écrit pas comme le carré d'un entier, alors \sqrt{n} est irrationnel.

Exercice 5 (*Partie entière*). Rappel : étant donné $x \in \mathbb{R}$, on a $p = \lfloor x \rfloor \iff (p \in \mathbb{Z} \text{ et } p \leq x < p + 1)$.

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

2) Étant donné deux réels x, y , est-ce que $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

3) En utilisant le fait que $x = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)$, exprimer $\lfloor 2x \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.

Exercice 6 (*Densité*). Montrer que les ensembles suivants sont denses dans \mathbb{R} :

$$X = \{ \sqrt[3]{r} \mid r \in \mathbb{Q} \} \quad (*) \quad Y = \left\{ \frac{k}{2^n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Exercice 7. Vrai ou faux ? Justifier.

- 1) Toute suite croissante admet une limite.
- 2) Toute suite décroissante est majorée.
- 3) Si $|u_n| \rightarrow \ell$, alors $u_n \rightarrow \ell$ ou $u_n \rightarrow -\ell$.
- 4) La relation $(x_n)\mathcal{R}(y_n) \iff \lim(x_n - y_n) = 0$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- 5) Une suite positive qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
- 6) La somme de deux suites divergentes est divergente.
- 7) La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.

Exercice 8 (*Sens de variation*). Étudier la monotonie (en précisant si elle est stricte) des suites de termes généraux suivants :

$$a_n = \cos(n\pi) \qquad b_n = \frac{2 + (-1)^n}{3^n} \qquad c_n = \frac{n^n}{n!}$$

Exercice 9 (*Limite de suites*). Déterminer, lorsqu'elle existe, la limite des suites de termes généraux suivants :

$$\begin{array}{llll} 1) u_n = \frac{\arccos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2} & 3) u_n = \frac{n^2 + 5n}{-5n^3 + \cos n} & 5) u_n = \sqrt[n]{3 + \sin n} & 7) u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ 2) u_n = \sqrt{n^2 + 1} - 2n & 4) u_n = \arctan(e^n) & 6) u_n = \sqrt[n]{n^2} & 8) u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{array}$$

Exercice 10 (*Série harmonique*). Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $\ln(1+x) \leq x$.

En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$, puis conclure sur la nature de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)_n$.

Exercice 11 (*Moyenne de Césarò*). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On définit la suite (v_n) par

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

- 1) On suppose que $u_n \rightarrow 0$. Montrer que $v_n \rightarrow 0$. Indication : pour tous entiers naturels $n \geq N$

$$|v_n| \leq \left| \frac{u_1 + \dots + u_{N-1}}{n} \right| + \left| \frac{u_N + \dots + u_n}{n} \right|$$

- 2) En déduire que si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, alors $v_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$.
- 3) La réciproque est-elle vraie ?
- 4) Montrer que si $u_n \rightarrow +\infty$, alors $v_n \rightarrow +\infty$.

Exercice 12. Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \left[3 + \frac{(-1)^n}{n}\right]$.

Exercice 13. Soit (u_n) une suite à valeurs dans \mathbb{Z} . Montrer que (u_n) est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 14 (*Suites définies implicitement*). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation (E_n) d'inconnue $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$:

$$x + \tan x = n$$

- 1) Montrer que l'équation (E_n) possède une unique solution x_n .
- 2) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 15 (★). Montrer que $1 = 0,999999\dots$ *Indication : utiliser le théorème d'unicité de la limite.*

Exercice 16 (★). Étudier la nature de la suite (u_n) où u_n est la n -ième décimale de $\sqrt{2}$.

Suites extraites, adjacentes, etc.

Exercice 17. Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 18. Montrer que la suite de terme général $u_n = \cos\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$ est divergente.

Exercice 19. Montrer que les suites de termes généraux suivants convergent :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Exercice 20. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que (S_n) converge.

Exercice 21. Déterminer la limite éventuelle des suites de termes généraux

$$u_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}} \quad v_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

Pour v_n , on pourra considérer la suite définie par $w_n = v_n + \frac{1}{10^n}$.

Exercice 22 (★). Montrer qu'une suite (u_n) est non majorée si et seulement s'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui tend vers $+\infty$.

Exercice 23 (Suite complexe). Soit (z_n) une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{3}(z_n + 2\bar{z}_n)$. Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0 .

Exercice 24. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(k\theta)}{2^k}$. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 25. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 1$

Exercice 26 (*Suites récurrentes doubles*). Déterminer le terme général des suites (u_n) définies par

- 1) $u_0 = 1, u_1 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
- 2) $u_0 = 1, u_1 = -1$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$
- 3) $u_0 = 1, u_1 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$
- 4) $u_0 = 1, u_1 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = e^{i\frac{\pi}{4}}u_{n+1} + 2iu_n$

Exercice 27. Déterminer la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2 \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

On pourra poser $v_n = u_n - 2$.

Exercice 28 (*Suites récurrentes, cas général*). Étudier les suites (u_n) définies par

- 1) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$
- 2) $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n^2$ (on discutera selon la valeur de u_0).
- 3) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \arctan(u_n)$
- 4) $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = e^{u_n} - 1$

Exercice 29 (\star). On cherche toutes les suites réelles (u_n) vérifiant $(E) : u_{n+1} - 3^{2n}u_n = 3^{n^2}$.

- 1) Soit (u_n) une solution. On note $C = u_0 \in \mathbb{R}$ le premier terme de la suite. Exprimer u_1, u_2, u_3 en fonction de C .
- 2) En déduire toutes les suites solutions de l'équation homogène $(E_H) : u_{n+1} - 3^{2n}u_n = 0$ et les exprimer en fonction de $C = u_0$.
- 3) Déterminer une solution particulière de (E) . On appliquera la méthode de la variation de la constante : on remplace C par C_n dans la solution de (E_H) , puis on injecte cette expression dans (E) , et enfin on trouve une suite (C_n) qui convient.
- 4) En déduire les solutions de (E) .